

基于多小波的图像去噪技术研究

费佩燕 郭宝龙

(西安电子科技大学测控工程系, 西安 710071)

摘要 多小波是小波理论的进一步发展,在实际应用中它可把十分重要的光滑性、紧支性、正交性、对称性等完美的结合起来。鉴于现有多小波去噪方法只谈及去噪思想,没给出具体的实现方法,为此,将多小波变换与单小波去噪方法中的 HeurShrink 去噪法结合起来,提出了一种切实可行的基于多小波的 HeurSure 图像去噪方法 (multiwavelet-based image denoising with HeurSure),简称 MDH 去噪法。并将 D4 单小波去噪法中的 HeurShrink 法与 MDH 法的去噪效果进行了比较。实验结果表明,MDH 法的去噪效果优于 D4 单小波的 HeurShrink 法去噪效果。

关键词 多小波 去噪 门限

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2005)01-0107-06

A Study on Multiwavelet-based Image Denoising

FEI Pei-yan, GUO Bao-long

(Department of Measurement & Control Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract Multiwavelets are developed in recent years. They are a new addition to the body of wavelet theory. They preserve many properties of single wavelets while overcoming limitations of single wavelets. In practice, they perfectly combine smoothness, short support, orthogonality, symmetry, ect. The existing algorithms of multiwavelets denoising only provide theories of denoising but there is no concrete performing method. Hence, multiwavelets are combined with HeurShrink denoising method in this paper. A feasible denoising method, called MDH, is proposed and the denoising performances of D4 scalar wavelet are compared with that of MDH. The experimental results show that MDH is superior to D4 scalar wavelet in denoising via HeurShrink.

Keywords multiwavelets, image denoising, thresholding

1 引言

众所周知,小波分析在信号处理中有着十分广泛的应用,特别是在信号滤波方面起着重要的作用。信号处理中较常用的小波函数是单小波,如 Daubeches 小波和样条小波,其中 Daubeches 小波是具有紧支集的正交小波,紧支集小波的特点是其滤波器系数有限;正交样条小波虽不是紧支集小波,但它是对称(或反对称)的。这种对称性常用于滤波器的设计,但是单小波往往不能同时满足紧支性和对称性等特点。自从最早的 GHM 多小波(由 Geronimo, Hardin 和 Massopust 提出)^[1]成功构造以来,多小波以其独特的

魅力引起了许多研究者的浓厚兴趣,这主要是因为它既保持了单小波的诸多优点,又克服了单小波的缺陷,而且它把十分重要的正交性、光滑性、紧支性、对称性等完美地结合了起来^[2]。在图像处理中,这些特性具有重要的作用,如正交性可保持能量;对称性既适合人眼的视觉系统,又使信号在边界易于处理;与紧支性小波对应的滤波器是有限脉冲响应(finite impulse response, FIR)滤波器,它能使得相应的快速小波变换之和是有限的;光滑性在数据压缩中也起着重要的作用,因为当用于小波变换的小波不光滑时,小波变换所带来的误差很容易被视觉检测出来。与单小波不同,多小波基由多个小波母函数经过伸缩平移生成,并对应有多个尺度函数。采用单小波对信号

收稿日期:2004-05-29;改回日期:2004-08-25

第一作者简介:费佩燕(1974~),女,西安电子科技大学在读博士生,2001年3月于西安工程科技学院获工学硕士学位。主要从事数字图像处理、小波分析、模式识别等方面的研究,已发表论文多篇。E-mail:feipeiyan@sina.com

进行处理时,可以直接对采样数据进行分解和重构,而多小波则要在分解前先对数据进行预处理,然后还需对处理后的数据进行分解,最后对重构后的数据还要进行后处理才能得到恢复数据。图像去噪方法虽比较多^[3],但利用多小波具有的特点研究图像的去噪问题是一个值得关注的新兴研究课题,目前尚没有人给出具体的实现方法。本文通过研究图像多小波变换的特点,利用多小波的正交性、光滑性、紧支性、对称性等优点,提出了一种基于多小波的 HeurSure 图像去噪方法(multiwavelet-based image denoising with heurSure),简称 MDH 去噪法。通过 D4 单小波去噪法与 MDH 去噪法的去噪效果的实验结果对比表明,MDH 法的去噪效果优于 D4 单小波的 HeurSure 去噪法的去噪效果。

2 图像的多小波变换

2.1 多小波变换

多小波变换与单小波变换不同,其在进行变换前,需进行预滤波。预滤波的目的是为了消除多小波的不恰当离散性^[4,5]。预滤波完成后,才能进行相应的多个小波变换。同理,完成多个小波重构后,还要进行后滤波才能实现完整的多小波重构。

多小波是由 $S \geq 2$ 的尺度函数 $\{\varphi_k(x)\}_{1 \leq k \leq S} \in L^2(\mathbf{R})$ 和相应的小波函数 $\{\psi_k(x)\}_{1 \leq k \leq S} \in L^2(\mathbf{R})$ 伸缩平移生成。设 $H_k = \{H_k\}_{0 \leq k \leq L-1}$ 和 $G_k = \{G_k\}_{0 \leq k \leq L-1}$ 为相应的第 k 个 $S \times S$ 滤波器矩阵, $\Phi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_S(x)\}^T$ 和 $\Psi(x) = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_S(x)\}^T$ 分别为尺度函数矢量和小波函数矢量,则多小波变换表示为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_S(x) \end{pmatrix} = 2 \sum_{k=0}^{L-1} H_k \begin{pmatrix} \varphi_1(2x-k) \\ \varphi_2(2x-k) \\ \vdots \\ \varphi_S(2x-k) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_S(x) \end{pmatrix} = 2 \sum_{k=0}^{L-1} G_k \begin{pmatrix} \varphi_1(2x-k) \\ \varphi_2(2x-k) \\ \vdots \\ \varphi_S(2x-k) \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中, $\{\varphi_k(x)\}_{1 \leq k \leq S}$ 的整数平移是相互正交的,且 $\{\psi_k(x)\}_{1 \leq k \leq S}$ 的二进伸缩和平移即构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交基。

2.2 图像多小波变换的实现方法

设待处理的信号为 $x(m, n), m, n \in \mathbf{Z}, 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N, \mathbf{Z}$ 是整数集。预滤波后,先生成 $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,1}, c_{2,2}$ 4 个 $\frac{m}{2} \times \frac{n}{2}$ 分量,然后对这 4 个分量进行多小波变换,即生成以下 16 个 $\frac{m}{4} \times \frac{n}{4}$ 分量

$$M = \begin{pmatrix} LL_1 & LL_2 & HL_1 & HL_2 \\ LL_3 & LL_4 & HL_3 & HL_4 \\ LH_1 & LH_2 & HH_1 & HH_2 \\ LH_3 & LH_4 & HH_3 & HH_4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

整个变换过程中,总像素数保持不变。多小波分解与重构的系统框图如图 1 所示。

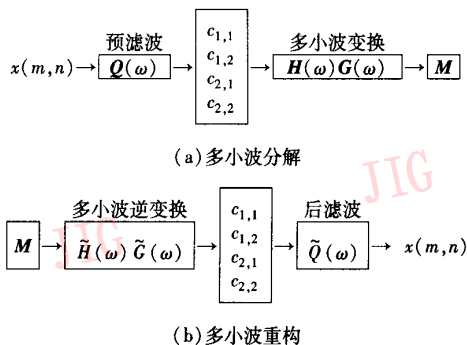


图 1 多小波分解与重构框图

Fig. 1 Blocks of multiwavelet decomposition and reconstruction

图中, $H(\omega)G(\omega)$ 为多小波滤波器, $\tilde{H}(\omega)\tilde{G}(\omega)$ 为多小波逆滤波器, $Q(\omega)$ 和 $\tilde{Q}(\omega)$ 分别表示预滤波器和后滤波器。这里以 $S=2$ 的多小波为例来说明多小波变换。预滤波系数由下列方法产生。

2.3 预滤波

(1) 行预滤波

在进行行预滤波时,首先列保持不变,对 $x(m, n)$ 进行隔行采样,首先生成的两个矩阵为 $[a_{m,(2n-1)}]$ 和 $[a_{m,2n}]$, $1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N/2$ 。行滤波表达式为

$$\sum_k Q(k) \begin{bmatrix} a_{m,(2n-1)} \\ a_{m,2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{m,n} \\ b_{m,(\frac{N}{2}+n)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

(2) 列预滤波

在进行列预备滤波时,行保持不变,对 $b_{m,n}$ 和 $b_{m,(\frac{N}{2}+n)}$ 进行隔列采样,首先生成两个矩阵 $[b_{(2m-1),n}]$ 和 $[b_{2m,n}]$, $[b_{(2m-1),(\frac{N}{2}+n)}]$ 和

$\left[b_{2m, (\frac{N}{2}+n)} \right], 1 \leq m \leq M/2, 1 \leq n \leq N/2$ 。列预滤波的结果是 $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,1}, c_{2,2}$ 。

$$\sum_k Q(k) \begin{bmatrix} b_{(2m-1), n} \\ b_{2m, n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{m, n} \\ c_{(\frac{M}{2}+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{1,1})_{m, n} \\ (c_{1,2})_{m, n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\sum_k Q(k) \begin{bmatrix} b_{(2m-1), (\frac{N}{2}+n)} \\ b_{2m, (\frac{N}{2}+n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{m, (\frac{N}{2}+n)} \\ c_{(\frac{M}{2}+m), (\frac{N}{2}+n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{2,1})_{m, n} \\ (c_{2,2})_{m, n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.4 多小波变换

(1) 行多小波变换

进行行多小波变换时,首先 $c(m, n), 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N$ 进行行方向采样,生成矩阵 $[c_{m, n}]$ 和 $[c_{m, (N/2+n)}], 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N/2$;然后采用式(7)和式(8)对 $[c_{m, n}]$ 和 $c_{m, (N/2+n)}$ 进行行多小波变换。

$$\sum_{n=1}^{N/4} H_{(n-2m)} \begin{bmatrix} c_{m, n} \\ c_{m, (N/2+n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{m, n}^L \\ c_{m, (N/4+n)}^L \end{bmatrix} \quad 1 \leq n \leq N/4, 1 \leq m \leq M \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{N/4} G_{(n-2m)} \begin{bmatrix} c_{m, n} \\ c_{m, (N/2+n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{m, n}^H \\ c_{m, (N/4+n)}^H \end{bmatrix} \quad 1 \leq n \leq N/4, 1 \leq m \leq M \quad (8)$$

将式(7)和式(8)的结果合成为 C_{row} ,于是行多小波变换后的结果矩阵表示为

$$(C_{row})_{M \times N} = [c_{m, n}^L, c_{m, (N/4+n)}^L, c_{m, n}^H, c_{m, (N/4+n)}^H]_{1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N/4} \quad (9)$$

(2) 列多小波变换

设

$$\begin{aligned} (c_{m, n}^L)_{1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N/4} &= C_1^L, \\ (c_{m, (N/4+n)}^L)_{1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N/4} &= C_2^L, \\ (c_{m, n}^H)_{1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N/4} &= C_1^H, \\ (c_{m, (N/4+n)}^H)_{1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N/4} &= C_2^H, \end{aligned}$$

首先分别对 $C_1^L, C_2^L, C_1^H, C_2^H$ 进行列方向采样,生成相应的矩阵组

$$\begin{bmatrix} (C_1^L)_{m, n} \\ (C_1^L)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (C_2^L)_{m, n} \\ (C_2^L)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} (C_1^H)_{m, n} \\ (C_1^H)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (C_2^H)_{m, n} \\ (C_2^H)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix}, 1 \leq m \leq M/2, 1 \leq n \leq N/4,$$

然后分别对以上矩阵进行列方向多小波变换

$$\sum_{m=1}^{M/4} H_{(n-2m)} \begin{bmatrix} (C_1^L)_{m, n} \\ (C_1^L)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (LL_1)_{m, n} \\ (LL_2)_{(M/4+m), n} \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M/4, 1 \leq n \leq N/4 \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{M/4} G_{(n-2m)} \begin{bmatrix} (C_1^L)_{m, n} \\ (C_1^L)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (LH_1)_{m, n} \\ (LH_2)_{(M/4+m), n} \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M/4, 1 \leq n \leq N/4 \quad (11)$$

$$\sum_{m=1}^{M/4} H_{(n-2m)} \begin{bmatrix} (C_2^L)_{m, n} \\ (C_2^L)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (LL_3)_{m, n} \\ (LL_4)_{(M/4+m), n} \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M/4, 1 \leq n \leq N/4 \quad (12)$$

$$\sum_{m=1}^{M/4} G_{(n-2m)} \begin{bmatrix} (C_2^L)_{m, n} \\ (C_2^L)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (LH_3)_{m, n} \\ (LH_4)_{(M/4+m), n} \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M/4, 1 \leq n \leq N/4 \quad (13)$$

$$\sum_{m=1}^{M/4} H_{(n-2m)} \begin{bmatrix} (C_1^H)_{m, n} \\ (C_1^H)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (HL_1)_{m, n} \\ (HL_2)_{(M/4+m), n} \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M/4, 1 \leq n \leq N/4 \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^{M/4} G_{(n-2m)} \begin{bmatrix} (C_1^H)_{m, n} \\ (C_1^H)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (HH_1)_{m, n} \\ (HH_2)_{(M/4+m), n} \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M/4, 1 \leq n \leq N/4 \quad (15)$$

$$\sum_{m=1}^{M/4} H_{(n-2m)} \begin{bmatrix} (C_2^H)_{m, n} \\ (C_2^H)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (HL_3)_{m, n} \\ (HL_4)_{(M/4+m), n} \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M/4, 1 \leq n \leq N/4 \quad (16)$$

$$\sum_{m=1}^{M/4} G_{(n-2m)} \begin{bmatrix} (C_2^H)_{m, n} \\ (C_2^H)_{(M/2+m), n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (HH_3)_{m, n} \\ (HH_4)_{(M/4+m), n} \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M/4, 1 \leq n \leq N/4 \quad (17)$$

整理后, $x(m, n), m, n \in \mathbf{Z}, 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N, \mathbf{Z}$ 为整数集,经过 $S=2$ 的多小波变换,其结果见式(3)。

根据正变换的过程及数据,多小波逆变换可逆向求得。这里从略。图2为 Lena 图像的 GHM 多小波分解与重构的一个实例。



(a) 分解

(b) 重构

图2 Lena 图像的 GHM 多小波变换

Fig.2 Image's GHM multiwavelet transform

3 基于多小波的 HeursSure 图像去噪方法

设 $f(x, y)$ 为原始信号, $f_{noise}(x, y)$ 为被高斯白

噪声污染的信号,噪声为 $n(x,y)$,其服从 $N(0,1)$ 分布,有噪声模型为

$$f_{\text{noise}}(x,y) = f(x,y) + n(x,y) \quad (18)$$

基于多小波变换的去噪方法是先将带有噪声的数据通过多小波变换展开为多小波级数,然后通过门限方法抽取“重要”的多小波系数,再把去噪后的多小波系数经多小波逆变换来重建未知信号的逼近。Mallat 在文献[6]中提到,在高斯噪声背景下,使用正交小波变换的优点在于各层的小波系数具有方差分布相同的特点,由于其便于系数域的统一处理,因此采用多小波变换去噪,应尽量利用这一优点。

3.1 MDH 的原理

由于多小波具有正交性、紧支性、光滑性等特点,且分解成分较单小波更为细致,因此本文基于这一思想,将多小波变换与去噪方法结合起来,首先对分解所得多小波系数进行 HeurSure 门限化处理,然后对处理后的小波系数进行多小波逆变换,即可得到去噪图像。本算法的关键是门限化处理方法的选择。

3.2 MDH 的算法实现

基于多小波变换的去噪流程图如图3所示,具体算法描述如下:

- (1)取多小波分解次数 J ,本文选 $J=1$;
- (2)滤波。对图像 $f_{\text{noise}}(x,y)$ 做预滤波生成图像 $c(x,y)$ 。
- (3)多小波变换。对噪声图像 $c(x,y)$ 做 J 次多小波变换得到 $(M_j)_{j=1,2,\dots,J}$ 。
- (4)门限化处理。采用已有的小波去噪的门限方法对 $(M_j)_{j=1,2,\dots,J}$ 进行门限化得 $(\tilde{F}_j)_{j=1,2,\dots,J}$ 。
- (5)多小波逆变换。对 $(\tilde{F}_j)_{j=1,2,\dots,J}$ 进行多小波重构得到图像 $\tilde{c}(x,y)$ 。
- (6)后滤波。通过对图像 $\tilde{c}(x,y)$ 进行后滤波来得到重构的去噪图像 $\tilde{f}(x,y)$ 。

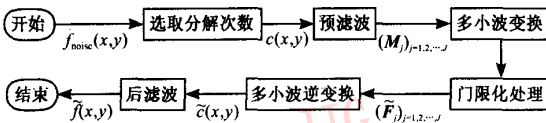


图3 多小波去噪流程图

Fig.3 Flow chart of multiwavelet denoising

为说明去噪效果,本算法采用常用的 $S=2, L=4$ 的 GHM 多小波进行去噪处理,其滤波器分别为:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 3/10 & 2\sqrt{2}/5 \\ -\sqrt{2}/40 & -3/20 \end{bmatrix} \quad H_1 = \begin{bmatrix} 3/10 & 0 \\ 9\sqrt{2}/40 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9\sqrt{2}/40 & -3/20 \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/40 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/40 & -3/20 \\ -1/20 & -3\sqrt{2}/20 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} -9\sqrt{2}/40 & -1/20 \\ 9/20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 9\sqrt{2}/40 & -3/20 \\ -9/20 & 3\sqrt{2}/20 \end{bmatrix} \quad G_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/40 & 0 \\ 1/20 & 0 \end{bmatrix}$$

预滤波器为

$$Q(0) = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 8 \times \sqrt{2} & 8 \times \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q(1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 \times \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

对 Lena 图像进行 GHM 多小波分解和重构的结果见图2。

3.3 MDH 的两项关键技术

小波变换去噪方法中,小波系数域的处理方法及门限的估计是两个关键性技术。

3.3.1 小波系数域处理方法

已经证明,在高斯白噪声下,Donoho 提出的小波系数阈值处理方法^[7]对光滑信号是渐进最优的。同时,由 Donoho 提出的软门限方法也是最常用的小波系数取舍方法。其表达式如下:

$$T_{\text{soft}}(\omega_k^{(j)}, \lambda) = \text{sgn}(\omega_k^{(j)}) (|\omega_k^{(j)}| - \lambda + ||\omega_k^{(j)}| - \lambda|) / 2 \quad (19)$$

其中, $\omega_k^{(j)}$ 是噪声图像的小波变换系数, λ 是小波门限值, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数。

在单小波去噪方法中,Donoho 和 Johnstone 提出的 VisulShrink 方法不仅是自适应的和渐进最优的,而且去噪效果优于后来的 Minimax 方法、SureShrink 方法和 HeurSure 方法。VisulShrink 方法定义的小波门限值 λ_V (下角 V 代表 VisulShrin) 按下面的公式给定:

$$\lambda_V = \sigma \sqrt{2 \times \ln(p)} \quad (20)$$

式中, p 是图像的像点数, σ 是噪声的标准差。VisulShrink 估计方法虽是一种简单的门限确定方法,但直接将此法用于多小波去噪,其优越性丧失,不仅重构图像有明显的 Gibbs 效应,而且严重影响去噪效果。

3.3.2 门限估计

本文采用 HeurSure 方法进行图像去噪,因为采用此法,不会产生 Gibbs 效应。HeurSure 方法是对 VisulShrink 方法的改进型估计方法,它的算法相对比较复杂。HeurSure 方法的门限值 λ_H (下角 H 代表 HeurSue) 确定方法如下:

- (1) 通过取相应图像的像点数 p 来求出 $\lambda_V = \sigma \sqrt{2 \times \ln(p)}$;

(2) 求取 η 和 μ : $\eta = (\|x\|_2^2 - p)/p$;
 $\mu = (\log_2(p))^{1.5}/\sqrt{p}$;
 则门限表示为

$$\lambda_H = \begin{cases} \lambda_v & \eta < \mu \\ \min(\lambda_s, \lambda_v) & \eta \geq \mu \end{cases} \quad (21)$$

其中, λ_s (下角 S 代表 SureShrink) 是用 SureShrink 方法按下面的步骤确定的门限值:

- ①求取图像的像点数 p ;
- ②对像素点按照灰度大小先进行从大到小重新排序,再对各元素进行求平方,以组成新的向量 s ;
- ③求向量 R :

$$R = \left(\begin{pmatrix} p \\ p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_1 + s_2 \\ \vdots \\ s_1 + s_2 + \dots + s_n \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} p-1 \\ p-2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{pmatrix} \right) / p \quad (22)$$

④先求出 R 中最小元素的相应位置 B ,再按下式计算门限值:

$$\lambda_s = \sigma \sqrt{s_B} \quad (23)$$

上述方法中都涉及对噪声标准差 σ 的估计,实际处理中,对噪声标准差 σ 的估计有以下 3 种方法:(1)

令 $\sigma = 1$;(2)取首次分解的噪声小波系数的中值作为标准差 σ 的估计值;(3)取多小波分解各分量的小波系数的中值作为标准差 σ 的估计值。本文采用第 3 种方法来确定标准差 σ 的估计,这种方法相对前两者,估值更准确。

4 实验结果

本实验采用 Lena 和 Panda 两幅图像做样本,将单小波去噪效果和多小波去噪效果进行对比(见图 4),其中单小波去噪法采用 D4 小波,多小波去噪法采用 GHM 多小波。本文采用 D4 小波的原因是:D4 小波有两个消失矩,其不仅具有正交性,且扩展方程中有 4 个系数,这点特别像 GHM 小波。另外,两种去噪方法都采用 HeurSure 方法确定门限值。

从表 1 和表 2 可看出,MDH 法的去噪效果好于 D4 法的去噪效果,MDH 法的去噪后图像峰值信噪比增值幅度平均高出 D4 法去噪后图像峰值信噪比增值幅度约 4 倍多。

图 5 中,横坐标代表原始图像的峰值信噪比,纵坐标代表峰值信噪比的增长幅度。从图 5 中的对比曲线可看出,两种方法的去噪效果呈非线性变化态势,其去噪的效果虽与图像本身相关,但 MDH 法的去噪效果明显优于 D4 去噪法的去噪效果。



(a) 原始 Lena 噪声图像(21.6022dB)



(b) D4 法去噪后的 Lena 图(21.6336dB)



(c) MDH 法去噪后的 Lena 图(21.679dB)



(d) 原始 Panda 噪声图像(20.4841dB)



(e) D4 法去噪后的 Panda 图(20.5265dB)



(f) MDH 法去噪后的 Panda 图(20.5775dB)

图 4 MDH 法和 D4 法的去噪效果对比

Fig. 4 Denoising effect compare with MDH and D4

表 1 不同去噪法去噪后的 Lena 图像峰值信噪比对比表

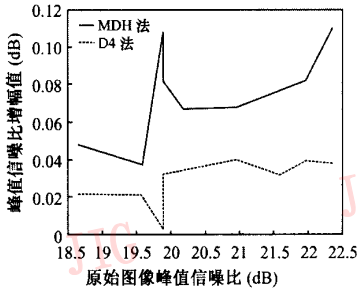
Table 1 Denoising effect compare of image Lena

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
输入图像峰值信噪比(dB)	22.3657	21.9661	21.6022	20.9560	20.1950	19.8985	19.8975	19.8942	19.5837	18.6499
MDH 法去噪后图像峰值信噪比增值(dB)	0.1104	0.0818	0.0768	0.0675	0.0667	0.0816	0.0910	0.1080	0.0371	0.0479
D4 法去噪后图像峰值信噪比增值(dB)	0.0377	0.0390	0.0314	0.0397	0.0341	0.0321	0.0300	0.0024	0.021	0.0212

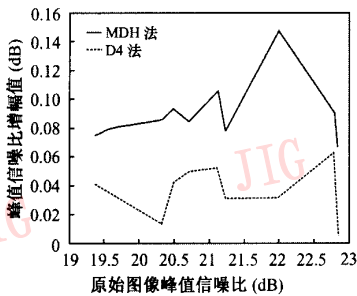
表 2 不同去噪法去噪后的 Panda 图像峰值信噪比对比表

Table 2 Denoising effect compare of image Panda

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
输入图像峰值信噪比(dB)	22.8281	22.7623	21.9941	21.2265	21.1249	20.7115	20.4841	20.3443	19.5688	19.3716
MDH 法去噪后图像峰值信噪比增值(dB)	0.0656	0.0908	0.1477	0.0774	0.1054	0.0846	0.0934	0.0859	0.0794	0.0747
D4 法去噪后图像峰值信噪比增值(dB)	0.0046	0.0631	0.0312	0.0301	0.0528	0.0499	0.0424	0.0128	0.036	0.0415



(a) Lena 图像



(b) Panda 图像

图 5 两种去噪方法的效果对比曲线图

Fig. 5 Curves come into being with the two methods

5 结论

从实验结果可以看到,采用 HeurSure 方法去噪,多小波虽比单小波有绝对优势,但图像的多小波变换比单小波变换复杂,因为其涉及预滤波和后滤波,而且多小波构造也较复杂,其不仅预滤波不同,而且得到的多小波分解结果也有所差异,尽管如此,

这些存在的难点背后也隐含着解决问题的出路。还有,由于目前小波门限值的选取还是基于传统的方法,而且单小波去噪的优选方法——VisulShrink 小波系数阈值处理方法在多小波去噪方法中失去了优势,因此,有必要寻求最优的多小波系数阈值处理方法,以便更好地发挥出多小波的理论优势。

参考文献 (Reference)

- Geronimo J, Hardin D P, Massopust P. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions [J]. Journal of Approximation Theory, 1994, 78(4):373~401.
- Strela V, Heller P N, Strang G, et al. The application of multiwavelet filterbanks to image processing[J]. IEEE Transactions Image Processing, 1999, 8(4):548~563.
- GUO Baolong, GUO Lei. Diffusion-concentration neural system for separating figures from background[J]. Chinese Science Bulletin, 1994, 39(10):1805~1808. [郭宝龙,郭雷. 用扩散和集中神经网络区分图形与背景[J]. 科学通报, 1994, 39(10):1805~1808.]
- Xia X G, Geronimo J S, Hardin D P, et al. Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms [J]. IEEE Transactions Signal Processing, 1996, 44(1):25~35.
- Xia X G. A new prefilter design for discrete multiwavelet transforms [J]. IEEE Transactions Signal processing, 1998, 46(6):1558~1570.
- Mallat S, Hwang Wen Liang. Singularity Detection and Processing with Wavelets[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, 38(2):617~643.
- Donoho D L. De-noising via soft-thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, 41(3):613~627.